# 作业二　（10月20日课堂上交）

1. 按顺序分别完成如下证明和问题:

a）证明：对于集合 $A$，如果 $A_1$，$A_2$，$\cdots$ 都是其子集，则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A,$$

其中 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 定义为 $\{x\colon$ 存在某个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，使得 $x \in A_n\}$。

b）证明：若集合 $A$ 和 $B$ 存在一一对应，则 $A$ 为无限集当且仅当 $B$ 为无限集。

c）证明：如果集合 $A$ 是无限集，则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，我们可以找到 $A$ 的子集 $B$，使得 $A$ 和 $B$ 之间有一一对应，且 $A - B$ 中至少包含 $n$ 个元素。（提示：考虑类似Hilbert旅馆腾出房间的方式并考虑无限集的定义，你们可以使用以前所学的数学归纳法）。

d）证明：如果集合 $A$ 是无限集，则 $\aleph_0 \leq |A|$。[自然数集（可数集）是最小的无限集]

e）证明：若集合 $C$ 为可数集，则存在 $C$ 的子集 $D$ 和 $E$，满足 $D \cap E = \varnothing$、$D \sqcup E = C$ 且 $|D| = |E| = |C| = \aleph_0$。

f）证明：若集合 $A$ 为不可数集，则存在 $A$ 的子集 $B$，使得 $B$ 是可数集且 $A - B$ 仍然为不可数集。

g）证明：若集合 $A$ 为不可数集，则存在 $A$ 的子集 $B$，使得 $B$ 是可数集且 $|A - B| = |A|$。

h）问题：在你的从 a）到 g）的证明中，是否用到了选择公理？如果用到，列出所有用到的地方。